سیدعلی‌رضا اشرفی، گروه ریاضی محض، دانشگاه کاشان

ریاضیات و موسیقی

اشاره

بیشتر مطالب این نوشته برگرفته از کتاب معروف جف سوزوکی است که در سال ۲۰۰۹ توسط «انجمن ریاضی آمریکا» به چاپ رسید. بخش‌هایی از این کتاب که به نقش ایرانیان در تاریخ تمدن و به‌خصوص ریاضیات می‌پردازد، مورد انتقاد نویسندهٔ این مقاله است. در این نوشته ما ریاضیات را از روزهای آغازین آن که با هنر و موسیقی رابطهٔ نزدیکی داشت، مورد توجه قرار داده‌ایم.

فیثاغورس، فیلسوف و ریاضی‌دان یونان باستان، طی سال‌های ۵۰۰ تا ۵۶۹ پیش از میلاد در یونان می‌زیست. محل تولد و مرگ وی جزیرهٔ «ساموس» در یونان است. در کتاب‌های تاریخی نقل شده است که **کمبوجیه**، پسر **کوروش**، مصر را در سال ۵۲۵ قبل از میلاد به امپراتوری ایران اضافه کرد. جغرافیای ایران در زمان مرگ او بزرگ‌ترین امپراتوری بود که جهان تا آن زمان به خود دیده بود. طی فتح مصر، تعدادی از یونانیان توسط ایرانیان اسیر و به بابل منتقل شدند. روایتی وجود دارد مبنی بر اینکه فیثاغورس ساموسی در میان این گروه بود.

فیثاغورس مسافرت‌های زیادی به دور و اطراف جهان داشت و بنابر نقل قول‌هایی از مورخان و اندیشمندان یونانی، او از سال ۵۳۵ قبل از میلاد در مصر بود و پیش از بازگشت به یونان، پنج سال در بابل به سر برد که در آن زمان بخشی از جغرافیای ایران بود.

آنچه سبب مهاجرت فیثاغورس از یونان شد، باورهای فلسفی او دربارهٔ نقش عددها در زندگی انسان است که با عقاید آن روز یونانی‌ها مغایرت داشت.

در «کروتون» که زادگاه **میلون**، کشتی‌گیر افسانه‌ای یونان باستان است، فیثاغورس مکتبی مخفی و عرفانی راه‌اندازی کرد که حدود یک قرن دوام آورد. هدف وی این بود که ریاضیات را براساس قوانین اخلاقی و فیزیکی بیان کند. وی با یکی از زنان فیلسوف پیرو خود به نام **تیانو** ازدواج کرد و از او صاحب پسری به نام **تلاگوس** و سه دختر به نام‌های **دامو**، **اریگ نته** و **مایبا** شد. بنابر روایتی تاریخی، میلون حامی فیثاغورس و دختر او یکی از اولین فیثاغورسیان بوده است. هیچ‌کدام از آثار فیثاغورس باقی نمانده‌اند و ما فقط آنچه را در اختیار داریم که از سوی پیروانش نقل شده است.

روابط متعدد میان عددها مورد توجه فیثاغورس و پیروان او قرار گرفت. آن‌ها به‌دنبال تجزیه و تحلیل جهان فیزیکی از نظر روابط این عددها بودند. برای مثال، آن‌ها ظاهراً کشف کردند که مجموع اولین n عدد فرد برابر n^2 است. فیثاغورس و پیروان او اعتقادات و باورهای عجیبی در خصوص زیبایی و نظم ریاضی داشتند. شاید بهترین شاهد زیبایی ریاضیات از مطالعهٔ فیثاغورس دربارهٔ موسیقی به دست می‌آید. بنابر روایتی مشکوک، فیثاغورس به‌طور اتفاقی از کنار یک آهنگری عبور می‌کرد که ناگهان متوجه شد، سروصدای چکش دلپذیر است. پس از تحقیقات دریافت که «وزن چکش» و «آهنگ ایجاد شده توسط آن»، رابطه‌ای عددی با یکدیگر دارند. این شروع مطالعهٔ موسیقی از دیدگاه ریاضی بود.

فیثاغورسیان به‌جای استفاده از چکش، از یک تک‌تار استفاده کردند که یک ساز زهی با یک پل متحرک بود. اگر پل مزبور سیم را به دو قسمت مساوی تقسیم کند، دو بخش را می‌توان یکی پس از دیگری (به‌صورت ملودیک) یا به‌طور هم‌زمان (هارمونیک) کشید. در هر دو مورد، صداها با هم هماهنگی خواهند داشت. اگر پل به صورتی حرکت کند که سیم به نسبت ۲ به ۱ تقسیم شود، آن‌گاه نسبت ۲:۱ نیز هماهنگی دیگری تولید می‌کند. فرض کنید یک آلت موسیقی را به‌گونه‌ای تنظیم کنیم که سیم‌ها نسبت ۴:۳:۲ یا ۶:۴:۳ داشته باشند. این آلت سه نت تولید خواهد کرد، با این ویژگی که هر ترکیبی از نت‌ها یک هم‌صدایی تشکیل می‌دهد.

با این حال، یک مجموعهٔ سه‌نتی بسیار محدود است و بنابراین نت‌های دیگری هم اضافه شدند. الگوهای متفاوتی به کار رفتند، اما در نهایت تقسیم وقفهٔ ۲:۱ به هشت نت استاندارد در نظر گرفته شد و **اقلیدس** اولین کسی بود که این تقسیم‌بندی را مورد توجه قرار داد؛ اگرچه این تقسیم‌بندی قطعاً پیش از او وجود داشت. از این یافته‌ها او به این سؤال رسید که: چگونه می‌توانیم حاصل توان یک عدد صحیح را برابر عدد صحیح دیگری بسازیم؟» اگر دو عدد صحیح عامل‌های اول متفاوتی داشته باشند، مشکل حل نشدنی است؛ در بهترین حالت می‌توان امید به یک تقریب مناسب را داشت.

فیثاغورس علاوه بر تحقیق دربارهٔ موسیقی، سنت بررسی نتایج ریاضی را به شیوه‌ای معنوی و فکری آغاز کرد و در نتیجه ریاضیات را به هنری آزاد تبدیل کرد. در واقع او روش قیاسی ریاضیات را معرفی و در عین حال دامنهٔ آن را به خواص نظری موضوع‌های انتزاعی محدود کرد.

فیثاغورس علاوه بر تحقیق دربارهٔ موسیقی، سنت بررسی نتایج ریاضی را به شیوه‌ای معنوی و فکری آغاز کرد و در نتیجه ریاضیات را به هنری آزاد تبدیل کرد

ریاضیات مصریان و بابلی‌ها به مسائل عملی مربوط می‌شد؛ مثلاً محاسبهٔ ارتفاع هرم یا هزینهٔ حفر یک کانال. این نوع ریاضیات، به دلیل ارتباط با کار تجربی، تنها برای بردگان مناسب تلقی می‌شد. برخی نوشته‌ها بیان می‌کنند، زمانی که فیثاغورس در بابل زندگی می‌کرد، برده بود. یونانیان این نوع از ریاضیات عملی و محاسباتی را حساب می‌نامیدند. تفاوت بین حساب و هندسه را در افکار فیثاغورس می‌توان چنین بیان کرد که قضیهٔ *«مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصل‌ضرب قاعده در ارتفاع»*، قانونی حسابی است. در حالی که قضیهٔ *«اگر دو متوازی‌الاضلاع قاعده و ارتفاع برابر داشته باشند، هر یک می‌توانند تشریح شده و مجدداً چنان پیکربندی شوند که متوازی‌الاضلاع دیگر را شکل دهند»*، یک حکم هندسی است.

به‌نظر می‌رسد فیثاغورسیان برای اولین بار به کشف و اثبات حداقل پنج قضیه در هندسه، مشهور هستند. چهار مورد از آن‌ها عبارت‌اند از:

۱. مجموع زاویه‌های یک مثلث برابر با مجموع دو زاویهٔ قائمه است.

۲. مجموع زاویه‌های یـــک چندضلعی محدب برابر است با «n-۲» برابر مجموع زاویه‌های یک مثلث.

۳. مجمـــوع زاویه‌های خارجـــی در یک چندضلعی محدب برابر مجموع چهار زاویهٔ قائمه است.

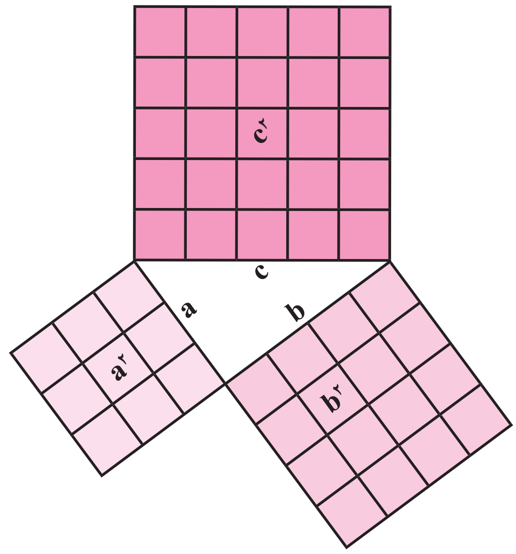
۴. فضای اطراف یک نقطه را می‌توان با مثلث، مربع، یا شش‌ضلعی‌های منتظم پر کرد.

آخرین قضیه به کشف فیثاغورس در خصوص سه مورد از پنج جســـم منتظم افلاطونـــی اختصاص دارد: هرم تشکیل شده از مثلث‌های متساوی‌الاضلاع، مکعب تشکیل شده از چند مربع، و دوازده‌وجهی تشکیل شده از پنج‌ضلعی‌های منتظم. کشف پنجم فیثاغورس، قضیه معروف اوست که بیان می‌کند: مربع وتر در یک مثلث قائم‌الزاویه برابر حاصل‌جمع مربعات دو ضلع دیگر است. برخی ادعا می‌کنند که فیثاغورس پس از کشـــف رابطهٔ بین اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه، یک گاو نر و در برخی روایت‌ها صد گاو قربانی کرد.

پروکلوس در قرن پنج میلادی نسبت به این افسانه اظهار تردید می‌کند، زیرا پیروان فیثاغورس به تناســـخ ارواح اعتقاد داشـــتند و مخالف سرسخت قربانی کردن حیوانات بودند. همچنین این داستان به طرز مشکوکی شـــبیه به داستانی اســـت که در مورد **تالس** نقل شده. داســـتان دیگر آن اســـت که فیثاغورس این قضیه را در مصـــر، از طناب‌بافانی آموخت که به راحتی قادر بودند با استفاده از رشته‌های گره‌دار ۳ ـ ۴ ـ ۵ مثلث قائم‌الزاویه درست کنند. ولی تاکنون هیچ نشانه‌ای از آگاهی مصریان از قضیهٔ فیثاغورس به دست نیامده است.

اگر فیثاغورس این قضیه را مســـتقلاً کشف نکرده باشـــد، ممکـــن اســـت آن را در بابل آموخته باشـــد. مشخص‌تر اینکه فیثاغوس ممکن است ترسیم آنچه را که امروز ســـه‌گانهٔ فیثاغورسی می‌نامیم، آموخته باشد: ســـه‌تایی مرتب (a,b,c) از عددهای صحیح مثبت را که در برابری $a^۲ + b^۲ = c^۲$ صدق می‌کنند، یک ســـه‌تایی فیثاغورســـی می‌نامند. فیثاغورس چندین سه‌تایی را از راه ترســـیم یافت. برای مثال، اگر a یـــک عدد فرد، b نصف $a^۲ - ۱$ و c یک واحد بیشتر از b باشد، آنگاه داریم: $a^۲ + b^۲ = c^۲$. برای مثال، اگر a=۵، $b = \frac{۱}{۲}(۵^۲ - ۱) = ۱۲$ و c=۱۲+۱=۱۳، آنگاه: $۵^۲ + ۱۲^۲ = ۱۳^۲$ و از این‌رو (۱۳، ۱۲، ۵) یک سه‌تایی فیثاغورسی است. در شکل ۱ اثباتی بدون برهان از این قضیه برای حالتی خاص ارائه شـــده است.

برخی اکتشاف‌های فیثاغورس به کمیت‌های گنگ منتهی می‌شدند و این باعث شد که پیروان فیثاغورس منکر وجود عددهایی غیر از عددهای گنگ شـــوند. ما نمی‌دانیم کمیت‌های گنگ چگونه یا توسط چه کسی کشــف شـــدند. حتی هویت اولین زوج از کمیت‌های گنگ ناشناخته است. یکی از کاندیداهای خوب، ضلع و قطـــر یـــک پنج‌ضلعی منتظم محـــاط در یک دایره است. **هیپاسوس**، کاشف این کمیت، به دلیل افشای روش‌های فیثاغورســـی طراحی پنج‌ضلعی منتظم در یک دایره و دوازده‌وجهی منظم در کره، برای بیگانگان، از این آیین اخراج شـــد. این مکتب به تدریج شـــروع به دخالت در سیاســـت‌های محلی کـــرد و از این‌رو از سوی مقامات حکومتی سرکوب شـــد. همان‌گونه که بیان شـــد، این مکتب نزدیک یک قرن به حیات خود ادامه داد.



شکل ۱ اثبات قضیهٔ فیثاغورس بدون برهان و با شکل برای حالت $(a,b,c)=(۳،۴،۵)$

منبع

Jeff Suzuki, Mathematics in Historical Context, The Mathematical Association of America, 2009

ریاضیات در چند دقیقه

غلامرضا یاسی‌پور

فرمول‌های دو برابر زاویه

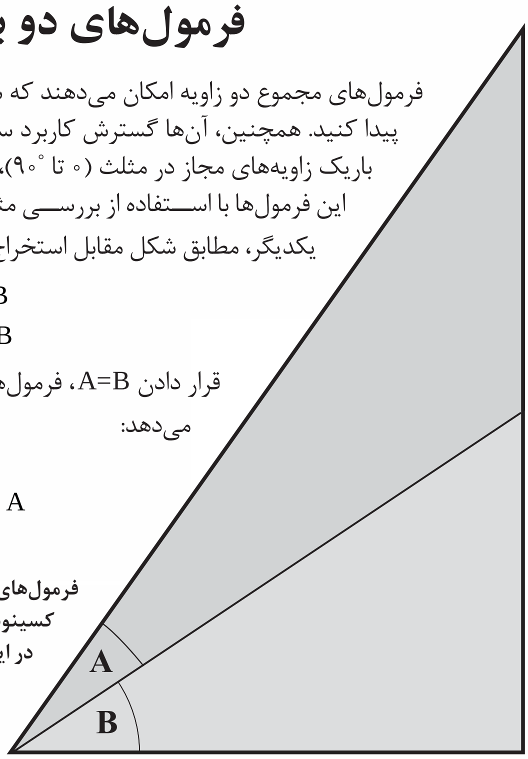
فرمول‌های مجموع دو زاویه امکان می‌دهند که سینوس‌ها و کسینوس‌های دوبرابر زاویه‌ها را پیدا کنید. همچنین، آن‌ها گسترش کاربرد سینوس‌ها و کسینوس‌ها را، در خارج از حوزهٔ باریک زاویه‌های مجاز در مثلث (۰ تا ۹۰°)، ممکن می‌سازند.

این فرمول‌ها با اســـتفاده از بررســـی مثلث‌های ساخته شده از دو مثلث چسبیده به یکدیگر، مطابق شکل مقابل استخراج شده‌اند:

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$
$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

قرار دادن A=B، فرمول‌های دو برابر زاویهٔ تعمیم‌یافتهٔ زیر را به‌دست می‌دهد:

$$\sin(۲A)=۲\sin A\cos A$$
$$\cos(۲A)=\cos^۲ A-\sin^۲ A=۱-۲\sin^۲ A$$
$$=۲\cos^۲ A-۱$$



فرمول‌های مجموع دو زاویه امکان محاســـبهٔ سینوس‌ها و کسینوس‌های زاویه‌های ترکیب شده، از قبیل A و B را در این جفت مثلث میسر می‌کنند.

منبع

MATHS IN MINUTES/Paul Glendinning/ Quercus 2012